

تعريف:

نفرض لدينا مجتمعاً احصائياً طبيعيّاً (تسمى u) $N \sim \mu$ ولناخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولتوجد المقداران المنتهية لكل من μ و σ^2 على أساس هذه العينة بطريقة العزوم.

الحل:

بما ان المجتمع الاحصائي يحتوي على وسيطين هما الأول μ والثاني σ^2 عنده لايجاد المقداران التفاضليتين لكل من μ و σ^2 نحتاج الى حل معادلة صاعدتين وهما:

$$(1) \quad m_1 = \alpha_1 \mid u = \mu$$

$$(2) \quad m_2 = \alpha_2 \mid u = \mu, \sigma^2 = \sigma^2$$

ومن المعادلة رقم (1)

$$\Rightarrow \bar{X} = \mu \mid u = \mu \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

أي ان المقدار التقديري للوسيط μ يتمثل بالمتوسط الحسابي واضح انه ناتج فقط من العينة العشوائية من المعادلة (2)

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = E(x^2) \mid u = \mu, \sigma^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \cancel{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} + \sigma^2 \mid u = \mu, \sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \sigma^2 + \mu$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{X}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

وهو المقدار التقديري للوسيط σ^2 والمقدار التقديري للوسيط μ

طريقة الاحتمالية العظمى لإيجاد المقدارات التقديرية:

نفرض لدينا مجتمع احصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي

$$P(X, \theta) \quad \text{أو} \quad P(X, \theta)$$

حيث θ هو الوسيط المجهول في هذا المجتمع ولناخذ عينة عشوائية حجمها n

عنده لايجاد المقدار التقديري للوسيط θ

نوجد $\hat{\theta}$ حيث $\hat{\theta}$ هي عبارة عن:

$$L = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_x(x_i, \theta) = P_x(x_1) \cdot P_x(x_2) \dots P_x(x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta) = f_x(x_1) \cdot f_x(x_2) \dots f_x(x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

حيث نلاحظ هنا نتائج الاحتمالية العظمى والتي نستخدمها لتابع المعقولة العظمى ومن ثم نوجد $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ وبحل المعادلات

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = 0$$

وبذلك المعادلة الأخيرة معادلة الاحتمالية العظمى ومعادلة المعقولة العظمى

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

وبما ان L و $\ln L$ لهما نفس القيمة النهائية

العظمى عند $\theta = 0$ يعني ان L مع مقدارها $\theta = 0$ من حل المعادلة التالية

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$$

مثال: نفرض لدينا مجتمع احصائي برنولي بسيط p ولناخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولنوجد المقدار التقضي للوسط p بطريقة الاحتمالية العظمى

الحل: بما ان المجتمع الاحصائي البرنولي يحتوي على وسيط واحد وهو عند $\theta = p$ ان حل معادلة واحدة هي

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad p = p$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \quad p = p$$

$$L = \prod_{i=1}^n (P(x_i, p)) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \quad \text{لدينا}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{x_1} p^{x_2} \dots p^{x_n} (1-p)^{1-x_1} (1-p)^{1-x_2} \dots (1-p)^{1-x_n}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

حيث لا تقل نتائج الاحتمالية العظمى انما هي المعقولة العظمى تأخذها بالظن من:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln (1-p)$$

نشتق بالنسبة للوسط p جريباً

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - (n - \sum_{i=1}^n x_i) \frac{1}{1-p}$$

بالمالي من صادلة الاحصائية العظمى نجد ان

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \mid p = \hat{p} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{p}} - \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{1 - \hat{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\hat{p}} = \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - \hat{p}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \hat{p} \sum_{i=1}^n x_i = \hat{p}n - \hat{p} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n \hat{p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

اي ان المقدار التقديري لمجتمع الاحصائي البرنولي هو المتغيرات للعينة العشوائية المتأخرون منه

مثال

مجتمع احصائي بواسوني وسيطه 1 وناحته منه عينة عشوائية حجمها n والنموذج المقدار التقديري الوسيط المجتمع الاحصائي البواسوني بطريقة الاحصائية العظمى

الحل:

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad \text{و} \quad \lambda > 0$$

ومن ثم

$$L = \prod_{i=1}^n P(X_i) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$$

ناحته لوثرتم الطريقة

$$\ln L = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0 \mid \lambda = \hat{\lambda} \Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}} = n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

اي ان المقدار التقديري للمجتمع الاحصائي البواسوني هو الوسط الحسابي

ملاحظة:

إذا كان المجتمع الأحصائي العظمى يحوي وسطين الأول θ_1 والثاني θ_2 وأخذنا عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع عندها لايجاد المقدارين النقطتين لكل من θ_1 و θ_2 فنحتاج أني حل جملتي معادلتين

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \theta_1 = \hat{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \theta_2 = \hat{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \theta_1 = \hat{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \theta_2 = \hat{\theta}_2$$

بلها لنين المعادلتين نحصل على المقداران النقطيتين وفي الحالة التي يكون فيها لدينا K وسيب معناه أني حل K معادلتين

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \theta_1 = \hat{\theta}_1$$

بل جملتي هذه المعادلتان نحصل على الوسطين النقطيتين

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \theta_2 = \hat{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \quad \theta_k = \hat{\theta}_k$$

مثال:

نفرض أنه لدينا مجتمع أحصائي طبيعي (μ, σ^2) و $X \sim N$ ولنا عينة من عينة عشوائية حجمها n ولتوجد كل من المقداران النقطيتين لكل من μ و σ^2 بطريقة الاحتمالية العظمى

الحل:

$$\frac{n}{f(x; \mu, \sigma^2)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n (2\pi \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi \sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

نأخذ لو غزيت الطرفين $\ln(x_i - \mu)^2$ في $\Rightarrow \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$
 وجا اننا لدينا معطيين الاول μ والثاني σ^2 فنفرض $\mu = \hat{\mu}$ و $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$

معادلتين من الشكل

$$\textcircled{1} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \Big|_{\mu = \hat{\mu}} \quad , \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \Big|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2}$$

بالنسبة الى معادلتنا الاحتمالية العظمى اننا نحتاج ان

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n \hat{\mu} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

وهو نفس المقدار النقطة الذي حصلنا عليه

ولدينا أيضاً

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

ومن معادلتنا الاحتمالية العظمى الثانية اي $\textcircled{2}$ نجد ان

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}{2(\hat{\sigma}^2)^2} = 0 \Rightarrow n = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\frac{n \hat{\sigma}^2}{n-1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$* E\left(\frac{n \hat{\sigma}^2}{n-1}\right) = n-1 \Rightarrow \frac{n}{n-1} E \hat{\sigma}^2 = n-1 \Rightarrow E \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)}{n}$$

$$* V\left(\frac{n \hat{\sigma}^2}{n-1}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \frac{n^2}{(n-1)^2} V(\hat{\sigma}^2) = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow V(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

$$\Rightarrow V(\hat{\sigma}^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

المقدر المنصف (النير منحاز)

نفرض لدينا مجتمعاً احصائياً ~~موزوناً~~ موزوناً بنوزيم احتمالي بسيط
وسيطه المجهول θ ولناخذ منه عينة عشوائية بحيث المقدر النقضي
للوسيط $\hat{\theta}$ لهذا المجتمع

$$T = \hat{\theta} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

عندئذ ~~نقول~~ بالتعريف نقول عن T أو عن $\hat{\theta}$ أنه مقدر غير منحاز
(منصف) إذا تحقق الشرط $ET = E\hat{\theta} = \theta$

هذا يعني أنه عند التوقع الرباضي المقدر النقضي للوسيط θ هو ذلك
الوسيط يعني أنه مقدر منصف ومع سيد المثال إذا عدنا إلى المجتمع
الاحصائي البرنوي والمجتمع الاحصائي اليواسوني الذي وجدنا فيما أن :

$$\hat{p} = \bar{x} \quad \hat{\lambda} = \bar{x}$$

نجد أن التوقع

$$E\hat{p} = E\bar{x} \quad \text{و} \quad E\bar{x} = p$$

$$E\hat{\lambda} = E\bar{x} \quad \text{و} \quad E\bar{x} = \lambda$$

الوسيط النقضي المقدر البرنوي هو وسيط منصف وكذلك الأمر للمقدر
اليواسوني

مثال ١

نفرض لدينا مجتمع احصائياً (نموذج 3) $X \sim N(3, \sigma^2)$ ولناخذ منه عينة عشوائية
حجمها n وليكن $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 3)^2$

والمطلوب : ① عن المقدر النقضي للوسيط θ

② أثبت أن المقدر T هو مقدر غير منحاز (أو منصف) للوسيط θ

الحل : ومن أجل ذلك يمكننا أن نكتب

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - 3)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad \text{و} \quad \text{نقح} \quad \text{و} \quad \text{بالتالي التوقع}$$

$$E\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = n \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} ET = n \Rightarrow ET = \sigma^2$$

أي أن T هو مقدر منصف أو غير منحاز $\theta = \sigma^2$

$$V\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = 2n \Rightarrow \frac{n^2}{\sigma^4} V(T) = 2n \Rightarrow V(T) = \frac{2\sigma^4}{n} \quad \text{الباقي}$$

المقدر النقطي المتناسق

إذا كانت لدينا T مقدراً نقظياً لوسيط مجتمع إحصائي θ على أساس عينة عشوائية حجمها n عندئذٍ بالتعريف نقول عن T أنه متنبئ مقدراً منسباً إذا تحقق شرطان

① المقدر الرباضي لـ T منصف أي أن $E T = \theta$

② التباين $V(T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

وإذا عدنا إلى المثال السابق والذي وجدنا فيه أن التوقع الرباضي للمقدر النقطي لـ θ هو θ أي أنه منصف وأوجدنا أن

$$V(T) = \frac{2\sigma^4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

حيث أن n سيرة بقدر سماعي

هذا يعني أن T مقدر منسب

علاصة

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

إذا كان لدينا T مقدراً نقظياً للوسيط θ على مجتمع إحصائي طبيعي فيه μ مجهول وذلك مع أساس عينة ~~عشوائية~~ حجمها n عندئذٍ حل هذا المقدر النقطي هو مقدر منسب أم لا

الحل:

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \sim K^2 (n-1)$$

$$\Rightarrow E \left(\frac{nT}{\sigma^2} \right) = n-1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} E T = n-1 \Rightarrow E T = \frac{n-1}{n} \theta$$

ليس مقدرًا منسباً لـ θ

لكن يكون مقدرًا منسباً لـ θ إذا كانت n سيرة بقدر سماعي

$$V \left(\frac{nT}{\sigma^2} \right) = 2(n-1) \Rightarrow V(T) = \frac{2(n-1)}{n^2} \theta^2$$

إذا كان n سيرة بقدر سماعي التباين سوف يكون مقدرًا منسباً

س. هل المقدار التقضي $\hat{\mu}$ في المجتمع الإحصائي الطبيعي μ مع أساس
عينة عشوائية حجمها n هو مقدار منه أم لا ؟

الجل : هـ

من المعلوم أن المقدار التقضي $\hat{\mu}$ لوسط المجتمع الإحصائي $\bar{X} = \hat{\mu}$ ومنه التوقع
الرياضي $E\hat{\mu} = E\bar{X} = EX = \mu$ ومنه $V(\hat{\mu}) = V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$

مثال :

نفرض لدينا مجتمع إحصائي منتظم ووسطه مع المجال $0 \leq X \leq 1$ حيث 0
وسيه ولتأخذ عينة عشوائية حجمها n والمطلوب
أيجاد المقدار التقضي للوسط 0 بطريقة التزوم ثم بين أن المقدار التقضي
الناتج منصف ومنه بالنسبة للوسط 0

الجل :

لدينا المجتمع الإحصائي المنتظم المستقر وسط واحد 0

$$m_1 = \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\bar{X} = \frac{\alpha}{2} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \hat{\alpha} = 2\bar{X}$$

$$E(\hat{\alpha}) = E(2\bar{X}) = 2E\bar{X} = 2EX = 2 \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

$$V(\hat{\alpha}) = V(2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = \frac{4V(X)}{n} = \frac{\alpha^2}{3n}$$

أي أن هذا المقدار هو مقدار منه ويتبين بوضوح أن المقدار

المقدار الكافي أو الأفضل

نفرض لدينا مجتمع إحصائي بسيط الحجم 0 وقد يكون منتظم
وقد يكون مستقر ولتأخذ عينة عشوائية حجمها n وليكن T_1
 T_2 مقدارين تقضين للوسط 0 بحيث هذين المقدارين منصفين
عندئذ نقول عن المقدار T_1 أنه أفضل من المقدار T_2 أو أفضل
أو أحسن

$$\sqrt{V(T_1)} < \sqrt{V(T_2)}$$

في هذه الحالة يكون فيها المقدارين نفس الفعاليته

مثال:

نفرض لدينا مجموع احصائي بواسوني وسيطه 1 وجميعه n ولتأخذ
مقدارين نقطيين للوسيط 1 عندنا ايها
 $T_1 = \bar{X}$ و $T_2 = \frac{X_1 + 3X_2}{4}$

افضل او ايها افضل

الحل:

$$E T_1 = E \bar{X} = E X = 1$$

$$E T_2 = E \left(\frac{X_1 + 3X_2}{4} \right) = \frac{1}{4} (E X_1 + 3 E X_2) \\ = \frac{1}{4} (1 + 3 \cdot 1) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\sqrt{V(T_1)} = \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{V(T_2)} = \frac{1}{4} \sqrt{V(X_1)} + 3 \sqrt{V(X_2)} = \frac{1}{4} (1 + 9) = \frac{10}{4}$$

وبمقارنته $\sqrt{V(T_1)}$ و $\sqrt{V(T_2)}$ الذي تبين ان اوله يكون هو الافضل
او الافضل